

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**21**

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Сложив два уравнения системы, получаем $14x^2 = 14$, откуда $x = -1$ или $x = 1$.

При $x = -1$ получаем $y = 7$.

При $x = 1$ получаем $y = 7$.

Решения системы уравнений: $(-1; 7)$ и $(1; 7)$.

Ответ: $(1; 7); (-1; 7)$.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Обоснованно получен верный ответ |
| 1 | Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

22

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 6 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.

Решение.

Пусть скорость первого бегуна равна v км/ч, тогда скорость второго —

$v + 6$ км/ч, а длина круга равна $\frac{54(v+6)}{60}$ км. Получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{54(v+6)}{60} - 4 &= v; \\ 9(v+6) - 40 &= 10v, \end{aligned}$$

откуда $v = 14$.

Ответ: 14 км/ч.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

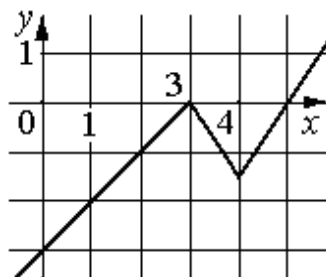
23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 3 & \text{при } x < 3, \\ -1,5x + 4,5 & \text{при } 3 \leq x \leq 4, \\ 1,5x - 7,5 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x - 3$ при $x < 3$, график функции $y = -1,5x + 4,5$ при $3 \leq x \leq 4$ и график функции $y = 1,5x - 7,5$ при $x > 4$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -1,5$ и при $m = 0$.

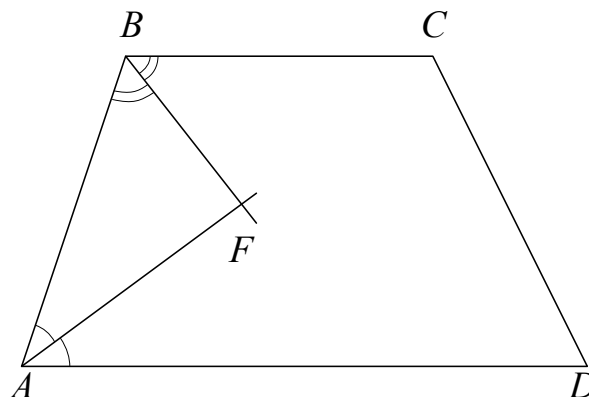
Ответ: $-1,5; 0$.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | График построен верно, верно найдены искомые значения параметра |
| 1 | График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 16$, $BF = 12$.

Решение.



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F . По теореме Пифагора находим AB :

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

Ответ: 20.

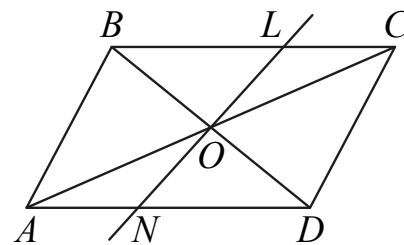
| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

25

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.

Доказательство.

В треугольниках CLO и ANO стороны CO и AO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle LCO = \angle NAO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC , а $\angle LOC = \angle AON$ как вертикальные углы.

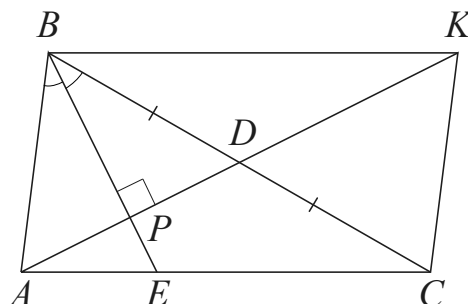


Значит, треугольники CLO и ANO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки CL и AN равны.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 26** В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 36. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение.



Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рисунок). Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 18; \quad BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

откуда $AC = 3AE$.

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC . Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD . Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE = 9$ и $BP = 27$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 9\sqrt{13}; \quad BC = 2AB = 18\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 9\sqrt{5}; \quad AC = 3AE = 27\sqrt{5}.$$

Ответ: $9\sqrt{13}; 18\sqrt{13}; 27\sqrt{5}$.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**21**

Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3. \end{cases}$

Решение.

Сложив два уравнения системы, получаем $12x^2 = 12$, откуда $x = -1$ или $x = 1$.
При $x = -1$ получаем $y = 5$.

При $x = 1$ получаем $y = 5$.

Решения системы уравнений: $(-1; 5)$ и $(1; 5)$.

Ответ: $(1; 5); (-1; 5)$.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Обоснованно получен верный ответ |
| 1 | Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

22

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 7 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 3 минуты назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 8 км/ч меньше скорости второго.

Решение.

Пусть скорость первого бегуна равна v км/ч, тогда скорость второго — $v + 8$ км/ч, а длина круга равна $\frac{57(v+8)}{60}$ км. Получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{57(v+8)}{60} - 7 &= v; \\ 19(v+8) - 140 &= 20v, \end{aligned}$$

откуда $v = 12$.

Ответ: 12 км/ч.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

23

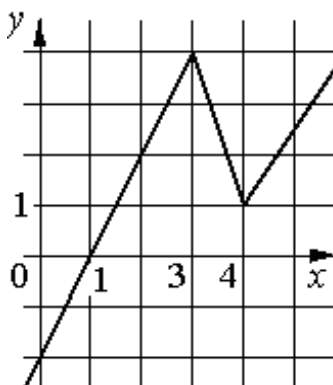
Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x - 2 & \text{при } x < 3, \\ -3x + 13 & \text{при } 3 \leq x \leq 4, \\ 1,5x - 5 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = 2x - 2$ при $x < 3$, график функции $y = -3x + 13$ при $3 \leq x \leq 4$ и график функции $y = 1,5x - 5$ при $x > 4$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = 1$ и при $m = 4$.

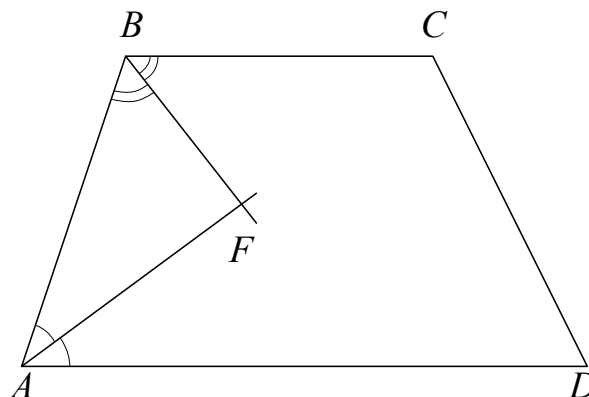
Ответ: 1; 4.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | График построен верно, верно найдены искомые значения параметра |
| 1 | График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 9$.

Решение.



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = 90^\circ.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F . По теореме Пифагора находим AB :

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Ответ: 15.

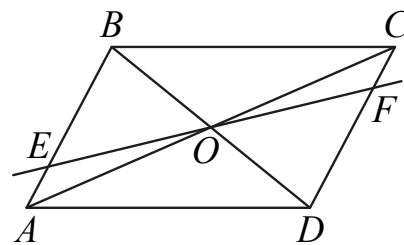
| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

25

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

Доказательство.

В треугольниках AEO и CFO стороны AO и CO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle EAO = \angle FCO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC , а $\angle EOA = \angle FOC$ как вертикальные углы.

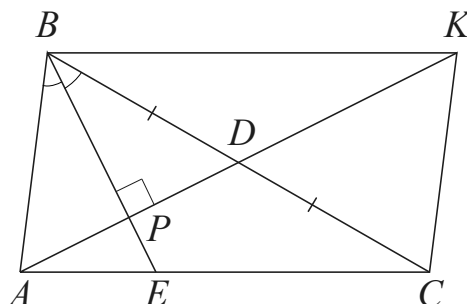


Значит, треугольники AEO и CFO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки AE и CF равны.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---------------------------------------------------------------------|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

26 В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 40. Найдите стороны треугольника ABC .

Решение.



Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рисунок). Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 20; \quad BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

откуда $AC = 3AE$.

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC . Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD . Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE = 10$ и $BP = 30$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 10\sqrt{13}; \quad BC = 2AB = 20\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 10\sqrt{5}; \quad AC = 3AE = 30\sqrt{5}.$$

Ответ: $10\sqrt{13}; 20\sqrt{13}; 30\sqrt{5}$.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |