Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

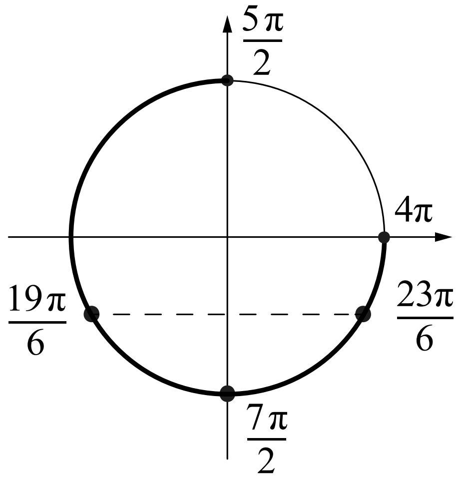
а) Поскольку $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)=\sin x$, уравнение примет вид $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\sin x}=-2$.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{3}{t}=-2$; $2t^2+3t+1=0$, откуда $t=-1$ или $t=-\dfrac{1}{2}$.

При $t=-1$ имеем $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. При $t=-\dfrac{1}{2}$ имеем $\sin x=-\dfrac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Получим числа $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.

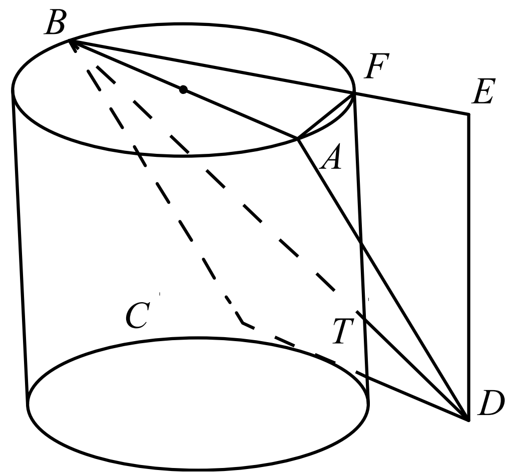
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

Решение.



а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{OK}{O_1K} = \dfrac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\dfrac{EF}{FB} = \dfrac{EF}{FA} \cdot \dfrac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\dfrac{EA}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Поэтому и $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{1}{4}$, т. е. $BT = \dfrac{4}{5}BD = \dfrac{4}{5}AD\sqrt{2} = \dfrac{4}{5}DE \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

<u>Решение.</u>

Преобразуем неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$; $\frac{\left(3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+9\right)x}{3^{x}} \geq 0$;

$\frac{(3^{x}-9)(3\cdot 3^{x}-1)x}{3^{x}} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $\left[-1;\,0\right];\left[2;\,+\infty\right)$.

Ответ: $\left[-1;\,0\right];\left[2;\,+\infty\right)$.

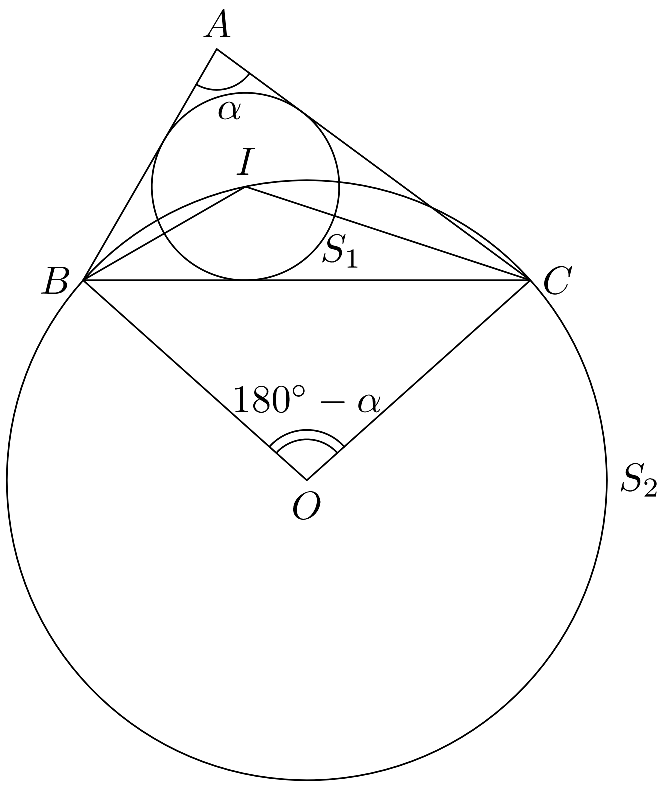
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

<u>Решение.</u>



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360^\circ - \left(180^\circ + \alpha\right) = 180^\circ - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна 180°, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{4} = \frac{r}{R} = \frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

<u>Решение.</u>

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{13S}{14};\ \ldots;\ \frac{2S}{14};\ \frac{S}{14};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{13S}{14};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{14};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{14}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}04S+\frac{S}{14};\ \frac{13\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \frac{0{,}04S+S}{14}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0,04\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=S\left(1+\frac{15\cdot 0,04}{2}\right)=1,3S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1 млн рублей.

Ответ: 1 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

Решение.

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, то есть среди решений уравнения

$\dfrac{\sqrt{3}\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$; $\sqrt{3}\cos x=6\sin x-\sqrt{3}\cos x$; $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $x=\dfrac{\pi}{6}+m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Пусть некоторое $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство

$\dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$ выполняется.

Следовательно, все значения $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;3\sqrt{2}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 20 раз было записано число 19 и один раз число 82. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 20 раз оказалось записано число 91 и один раз число 28. Сумма этих чисел равна $1848=4\cdot 462$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=462$ и $10B+A=2\cdot 462$. Тогда разность этих чисел равна $9(B-A)=462$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 462$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(462 - 10A) + A = 4620 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$462 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{462}{19} > 24$, т. е. $A \ge 25$. Значит,

$$S = 4620 - 99A \le 4620 - 99 \cdot 25 = 2145.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2145. Пусть первоначально на доске 23 раза было записано число 19 и один раз число 25. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 23 раза оказалось записано число 91 и один раз число 52. Сумма этих чисел равна 2145.

Ответ: а) Да, например, 20 раз число 19 и один раз число 82; б) нет; в) 2145.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}=2$.

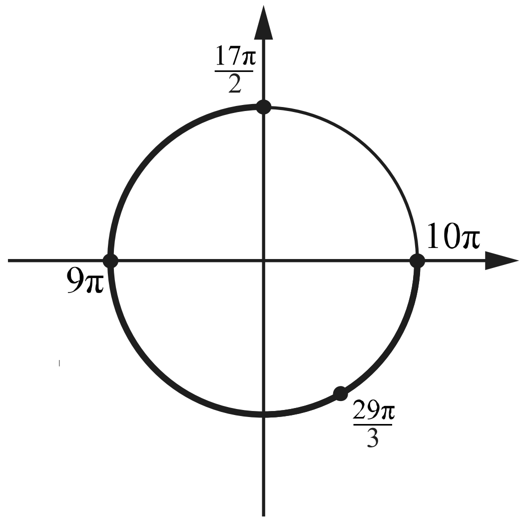
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, уравнение примет вид $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos x}=2$.

Пусть $\cos x=t$, тогда $\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=2$; $2t^2+t-1=0$, откуда $t=-1$ или $t=\dfrac{1}{2}$. При $t=-1$ имеем $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. При $t=\dfrac{1}{2}$ имеем $\cos x=\dfrac{1}{2}$; $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$. Получим числа 9π; $\dfrac{29\pi}{3}$.



Ответ: а) $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;
$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) 9π; $\dfrac{29\pi}{3}$.

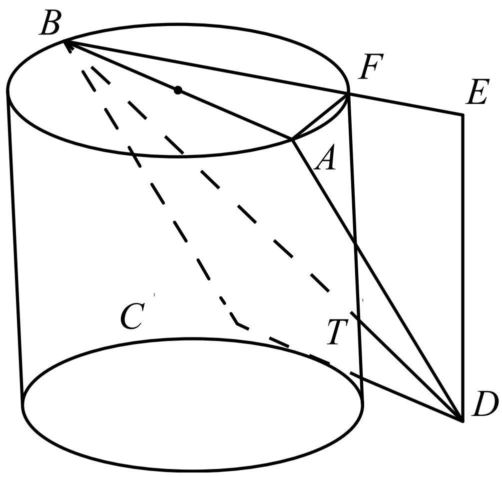
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $3\sqrt{2}$.

Решение.



а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и $\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр,

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA}\cdot\frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF\cdot\operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $BT = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}AD\sqrt{2} = \frac{4}{5}DE\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(2^{x+2}+2^{3-x}\right)x \geq 33x$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(2^{x+2}+2^{3-x}\right)x \geq 33x$; $\dfrac{\left(4\cdot 2^{2x}-33\cdot 2^{x}+8\right)x}{2^{x}} \geq 0$;

$\dfrac{(2^{x}-8)(4\cdot 2^{x}-1)x}{2^{x}} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $[-2;\, 0];[3;\, +\infty)$.

Ответ: $[-2;\, 0];[3;\, +\infty)$.

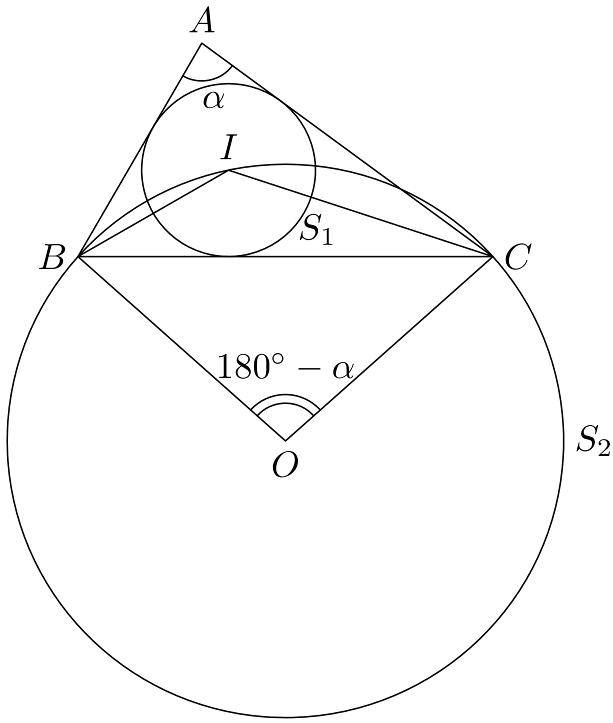
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $4:5$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180° + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360° - (180° + \alpha) = 180° - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна $180°$, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{4}{5} = \frac{r}{R} = \frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{8}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{25}{64} = \frac{7}{32}$.

Ответ: $\frac{7}{32}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:
$$S;\ \frac{10S}{11};\ \ldots;\ \frac{2S}{11};\ \frac{S}{11};\ 0.$$
Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:
$$1{,}03S;\ 1{,}03\cdot\frac{10S}{11};\ \ldots;\ 1{,}03\cdot\frac{2S}{11};\ 1{,}03\cdot\frac{S}{11}.$$
Таким образом, выплаты должны быть следующими:
$$0{,}03S+\frac{S}{11};\ \frac{10\cdot 0{,}03S+S}{11};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}03S+S}{11};\ \frac{0{,}03S+S}{11}.$$
Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0,03\left(1+\frac{10}{11}+\ldots+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)=S\left(1+\frac{12\cdot 0,03}{2}\right)=1,18S\,.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 0,5 млн рублей.

Ответ: 0,5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x+(\sqrt{3}-5a)\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-3\sqrt{2};\,1]$.

<u>**Решение.**</u>

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1;\qquad \sqrt{3}\cos 4x=6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x;\qquad \operatorname{tg}4x=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{4},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{5a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};\,1]$ выполняется**.** Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-5a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}$, где $k\in\mathbb{Z}$**.**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 429. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 18 раз было записано число 19 и один раз число 87. Тогда сумма этих чисел равна 429. После перестановки цифр на доске 18 раз оказалось записано число 91 и один раз число 78. Сумма этих чисел равна $1716=4\cdot 429$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=429$ и $10B+A=3\cdot 429$. Тогда разность этих чисел равна $9\left(B-A\right)=2\cdot 429$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 429$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(429 - 10A) + A = 4290 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$429 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{429}{19} > 22$, т. е. $A \ge 23$. Значит,

$$S = 4290 - 99A \le 4290 - 99 \cdot 23 = 2013.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2013. Пусть первоначально на доске 22 раза было записано число 19 и один раз число 11. Тогда сумма этих чисел равна 429. После перестановки цифр на доске 22 раза оказалось записано число 91 и один раз число 11. Сумма этих чисел равна 2013.

Ответ: а) Да, например, 18 раз число 19 и один раз число 87; б) нет; в) 2013.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\frac{3}{\cos x}$.

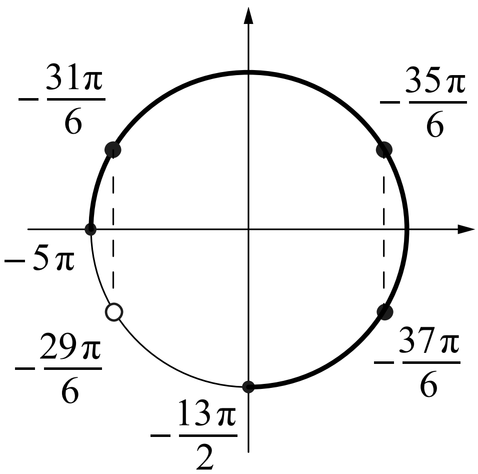
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=\cos x$, уравнение примет вид $4\cos x=\frac{3}{\cos x}$; $\cos^2 x=\frac{3}{4}$, откуда $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{37\pi}{6}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $-\frac{31\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{37\pi}{6}$; $-\frac{35\pi}{6}$; $-\frac{31\pi}{6}$.

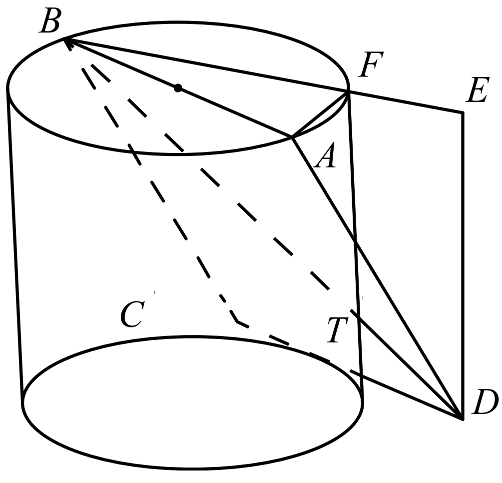
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

Решение.



а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол $OKO_1 = 60°$ и $\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$, поэтому $O_1K = AD = AB = 2r$, значит, $ABCD$ — квадрат.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $DT = \frac{1}{5}BD = \frac{1}{5}AD\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}r = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2} = 0{,}8$.

Ответ: $0{,}8$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+2}+3^{2-x}\right)x^2 \ge \frac{45x^2}{2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(3^{x+2}+3^{2-x}\right)x^2 \ge \frac{45x^2}{2}$; $\frac{\left(2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x+2\right)x^2}{3^x} \ge 0$;

$\frac{(3^x-2)(2\cdot 3^x-1)x^2}{3^x} \ge 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $(-\infty; -\log_3 2]; \{0\}; [\log_3 2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -\log_3 2]; \{0\}; [\log_3 2; +\infty)$.

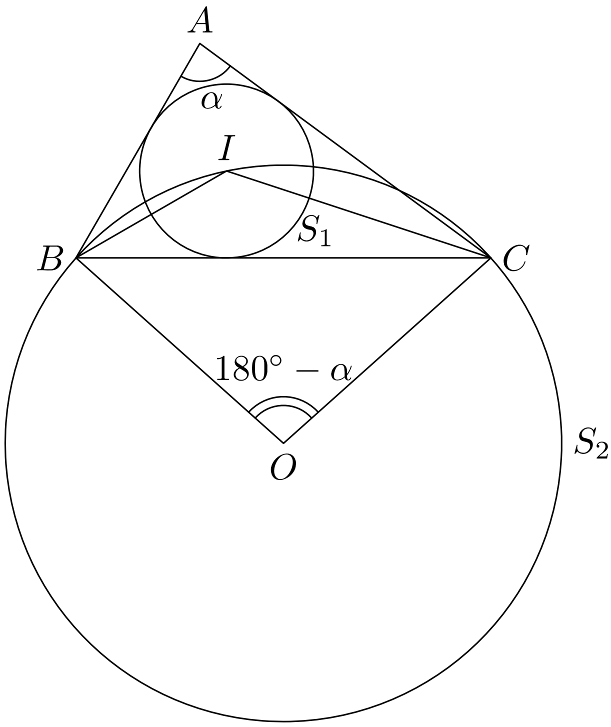
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:5$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаеи, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180° + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360° - (180° + \alpha) = 180° - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна $180°$, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{5} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{25}{36} = -\frac{7}{18}$.

Ответ: $-\frac{7}{18}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 2,34 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{15S}{16};\ \ldots;\ \frac{2S}{16};\ \frac{S}{16};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}02S;\ 1{,}02\cdot\frac{15S}{16};\ \ldots;\ 1{,}02\cdot\frac{2S}{16};\ 1{,}02\cdot\frac{S}{16}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}02S+\frac{S}{16};\ \frac{15\cdot 0{,}02S+S}{16};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}02S+S}{16};\ \frac{0{,}02S+S}{16}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}02\left(1+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\right)=S\left(1+\frac{17\cdot 0{,}02}{2}\right)=1{,}17S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 2 млн рублей.

Ответ: 2 млн рублей.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{(a-1)\sqrt{3}\sin 2x+(1+\sqrt{3}-a)\cos 2x}{6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}=1$ при любом значении a из отрезка $[0;\,7\sqrt{3}]$.

<u>Решение.</u>

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=1$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 2x}{6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}=1;\qquad \sqrt{3}\cos 2x=6\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x;\qquad \operatorname{tg}2x=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$ — решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{(a-1)\frac{\sqrt{3}}{2}+(1+\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[0;\,7\sqrt{3}]$ выполняется**.** Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство

$$\frac{-(a-1)\frac{\sqrt{3}}{2}-(1+\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$$ при всех a из отрезка $[0;\,7\sqrt{3}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 7 раз было записано число 19 и один раз число 32. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 7 раз оказалось записано число 91 и один раз число 23. Сумма этих чисел равна $660=4\cdot165$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=165$ и $10B+A=5\cdot165$. Тогда разность этих чисел равна $9(B-A)=4\cdot165$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=165$, и нужно найти наибольшее значение числа $S=10B+A$. Тогда

$$S=10B+A=10(165-10A)+A=1650-99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1\le 9a_1$, …, $b_n\le 9a_n$, получаем $B\le 9A$. Поэтому

$$165=10A+B\le 10A+9A=19A,$$

откуда $A\ge\frac{165}{19}>8$, то есть $A\ge 9$. Значит,

$$S=1650-99A\le 1650-99\cdot 9=759.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 759. Пусть первоначально на доске 8 раз было записано число 19 и один раз число 13. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 8 раз оказалось записано число 91 и один раз число 31. Сумма этих чисел равна 759.

Ответ: а) Да, например, 7 раз число 19 и один раз число 23; б) нет; в) 759.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

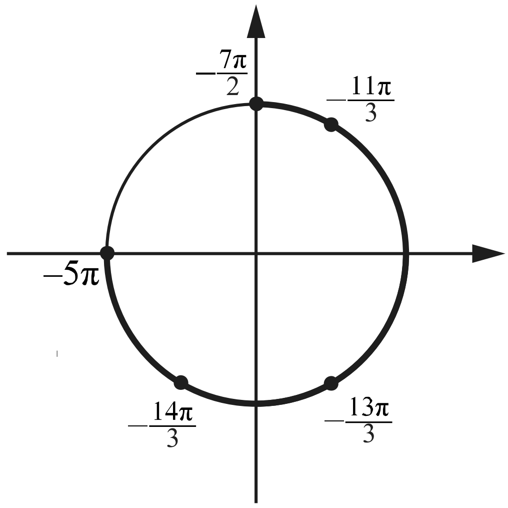
13 а) Решите уравнение $4\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\cos x$, уравнение примет вид $4\cos x=\frac{1}{\cos x}$; $\cos^2 x=\frac{1}{4}$, откуда $\cos x=\pm\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{3}$.

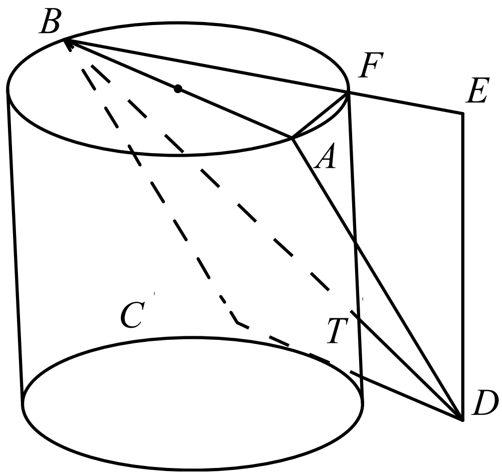
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен 4.

Решение.



а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол $OKO_1 = 60°$ и $\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$, поэтому $O_1K = AD = AB = 2r$, значит $ABCD$ — квадрат.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF \cdot \operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $DT = \frac{1}{5}BD = \frac{1}{5}AD\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}r = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot 4 = \frac{8\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(5^{x+2}+5^{2-x}\right)x^2\ge\frac{125x^2}{2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(5^{x+2}+5^{2-x}\right)x^2\ge\frac{125x^2}{2}$; $\frac{\left(2\cdot5^{2x}-5\cdot5^x+2\right)x^2}{5^x}\ge0$; $\frac{(5^x-2)(2\cdot5^x-1)x^2}{5^x}\ge0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $(-\infty;-\log_5 2];\{0\};[\log_5 2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-\log_5 2];\{0\};[\log_5 2;+\infty)$.

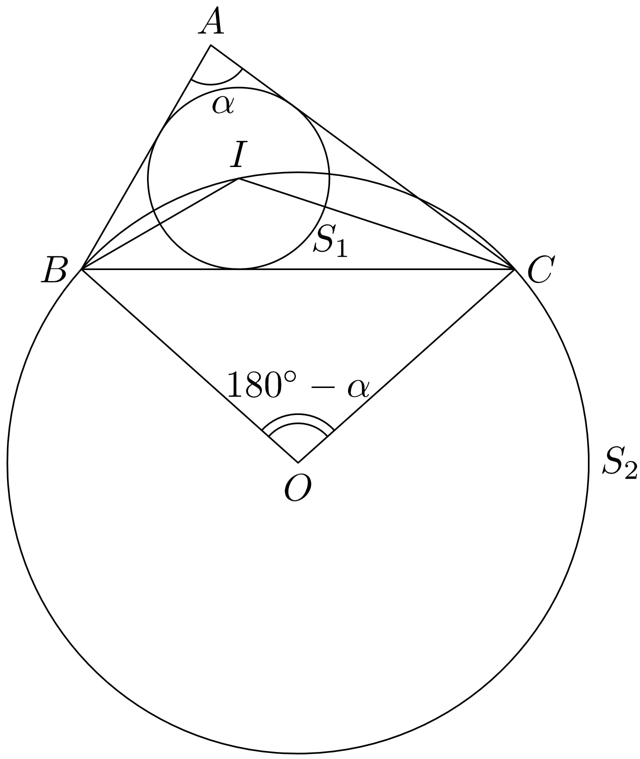
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $2:3$.

<u>Решение.</u>



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180° + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360° - (180° + \alpha) = 180° - \alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна $180°$, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{2}{3} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 10 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,83 млн рублей?

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{9S}{10};\ \ldots;\ \frac{2S}{10};\ \frac{S}{10};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{9S}{10};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{10};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{10}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}04S+\frac{S}{10};\ \frac{9\cdot 0{,}04S+S}{10};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{10};\ \frac{0{,}04S+S}{10}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0,04\left(1+\frac{9}{10}+...+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=S\left(1+\frac{11\cdot 0,04}{2}\right)=1,22S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1,5 млн рублей.

Ответ: 1,5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{a\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+(\sqrt{3}-a)\cos\frac{x}{2}}{6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}=1$ при любом значении a из отрезка $[-2;\,5\sqrt{2}]$.

<u>Решение.</u>

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}{6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}=1;\quad \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=6\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2};\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$ — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-2;\,5\sqrt{2}]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-a\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} - a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ при всех a из отрезка $[-2; 5\sqrt{2}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$**.**

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 11 раз было записано число 19 и один раз число 55. Тогда сумма этих чисел равна 264. После перестановки цифр на доске 11 раз оказалось записано число 91 и один раз число 55. Сумма этих чисел равна $1056 = 4 \cdot 264$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}$, …, $\overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 264$ и $10B + A = 3 \cdot 264$. Тогда разность этих чисел равна $9\left(B - A\right) = 2 \cdot 264$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 264$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(264 - 10A) + A = 2640 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$264 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{264}{19} > 13$, т. е. $A \ge 14$. Значит,

$$S = 2640 - 99A \le 2640 - 99 \cdot 14 = 1254.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 1254. Пусть первоначально на доске 13 раз было записано число 19 и один раз число 17. Тогда сумма этих чисел равна 264. После перестановки цифр на доске 13 раз оказалось записано число 91 и один раз число 71. Сумма этих чисел равна 1254.

Ответ: а) Да, например, 11 раз число 19 и один раз число 55; б) нет; в) 1254.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4